Результаты регионального конкурса профессионального мастерства учителей математики по решению задач

1 место

Шестакова Мария Юрьевна
МОУ Лицей № 1 г. Волжского Волгоградской области

2 место

Веремеенко Татьяна Васильевна
МОУ «Средняя школа № 82 Дзержинского района Волгограда»

Воронина Елена Борисовна
МКОУ «Руднянская средняя общеобразовательная школа им. А. С. Пушкина Руднянского муниципального района Волгоградской области

3 место

Букина Анна Сергеевна
МОУ «Средняя школа с углубленным с углубленным изучением отдельных предметов № 57 Кировского района Волгограда»

Примеры решения задач победителей.

Задача 1. «Сколько целых точек лежит на отрезке, соединяющим точки а) $(0,0)$ и $(20,28)$; б) $(0,0)$ и $(-56,72)$».

Веремеенко Т.В.

Решите задачи:

1. Сколько целых точек лежит на отрезке, соединяющим точки а) $(0,0)$ и $(20,28)$; б) $(0,0)$ и $(-56,72)$.

Решение.

а). Уравнение прямой, проходящей через точки $(0,0)$ и $(20,28)$: $y = \frac{28}{20}x$ или $y = \frac{7}{5}x$

По условию x и y целые числа, значит целое число x должно быть кратно 5. На отрезке от 0 до 20 это числа 0; 5; 10; 15; 20. Получаем, что на отрезке, соединяющем точки $(0,0)$ и $(20,28)$ лежит 5 целых точек.

Ответ: 5 целых точек.

б). Уравнение прямой, проходящей через точки $(0,0)$ и $(-56,72)$: $y = -\frac{72}{56}x$ или $y = -\frac{9}{7}x$

По условию x и y целые числа, значит целое число x должно быть кратно 7. . На отрезке от – 56 до 0 это числа - 56; - 49; - 42; - 35; -28; - 21; - 14; - 7; 0. Получаем, что на отрезке, соединяющем точки $(0,0)$ и $(-56,72)$ лежит 9 целых точек.

Ответ: 9 целых точек.

Задача 2. «Докажите иррациональность числа sin22°, если известно, что sin88°– иррациональное число»

Веремеенко Т.В.

2. Докажите иррациональность числа sin22°, если известно, что sin88°– иррациональное число.

Решение.

1) $\sin 88^\circ = 2\sin 44^\circ \cdot \sqrt{1-\sin^2 44^\circ}$

Обозначим: $\sin 44^\circ = x$, $x \in (0;1)$.

$\sin 88^\circ = 2x \cdot \sqrt{1-x^2}$

$\sin 88^\circ > 0$ и $2x\sqrt{1-x^2} > 0$

$\sin^2 88^\circ = 4x^2(1-x^2)$

$4x^4 - 4x^2 + \sin^2 88^\circ = 0.$

$x^2 = t$, $t > 0.$

$4t^2 - 4t + \sin^2 88^\circ = 0.$

$D_1 = 4 - 4\sin^2 88^\circ = 4\cos^2 88^\circ.$

$t_{1,2} = \dfrac{2 \pm 2\cos 88^\circ}{4} = \dfrac{1 \pm \cos 88^\circ}{2}.$

$x_{1,2} = \dfrac{\sqrt{1 \pm \cos 88^\circ}}{\sqrt{2}};$

$\sin 44^\circ = \dfrac{\sqrt{1 - \cos 88^\circ}}{\sqrt{2}}$

иррац. число., т.к. и $\cos 88^\circ$ – иррац. число, в противном случае по осн. триг. тождеству $\sin 88^\circ$ рац. число.

2) $\sin 44^\circ = 2\sin 22^\circ \sqrt{1-\sin^2 22^\circ}$

обозначим: $\sin 22^\circ = x$, $x \in (0;1)$.

$\sin 44^\circ = 2x\sqrt{1-x^2}$

$\sin 44^\circ > 0$ и $2x\sqrt{1-x^2} > 0.$

$\sin^2 44 = 4x^2(1-x^2)$

$4x^4 - 4x^2 + \sin^2 44^\circ = 0.$

$x^2 = t$, $t > 0.$

$4t^2 - 4t + \sin^2 44^\circ = 0$

$D_1 = 4 - 4\sin^2 44^\circ = 4\cos^2 44^\circ.$

$t_{1,2} = \dfrac{1 \pm \cos 44^\circ}{2}$

$x_{1,2} = \dfrac{\sqrt{1 \pm \cos 44^\circ}}{\sqrt{2}}$

$\sin 22^\circ = \dfrac{\sqrt{1 - \cos 44^\circ}}{\sqrt{2}}$

иррац. число., т.к. $\cos 44^\circ$ иррац. число.

Веремеева Татьяна Васильевна

Шестакова М. Ю.

Задача 2 Докажите иррациональность числа $\sin 22°$, если известно, что $\sin 88°$ – иррациональное число.

Решение:

1) Используя теорему 1 „Пусть $0<\alpha<90°$. Тогда, если угол α содержит рациональное число градусов и $\alpha \neq 60°$, то число $\cos\alpha$ иррационально"

1

получаем: $\sin 22° = \cos(90-68°) = \cos 68°$

$68° \neq 60°$, значит $\cos 68°$ – иррациональное число, следовательно $\sin 22°$ – иррациональное число.

2) Используя теорему 2 „Пусть $0<\alpha<90°$. Тогда если угол α содержит рациональное число градусов и $\alpha \neq 30°$, то число $\sin\alpha$ иррационально", получаем $22° \neq 30°$, значит $\sin 22°$ – иррациональное число.

(Источник: А. Нивен „Числа рациональные и иррациональные" приложение Г. Доказательство иррациональности значений тригонометрических функций И. М. Яглом)

Воронина Е. Б.

№2. Докажите иррациональность числа $\sin 22°$, если известно, что $\sin 88°$ – иррациональное число.

<u>Доказательство</u>: При доказательстве воспользуемся следующей теоремой: Пусть $0 < \alpha < 90°$. Тогда, если угол α содержит рациональное число градусов и $\alpha \neq 60°$, то число $\cos \alpha$ иррационально.

$\Rightarrow \cos 88°$ является иррациональным числом. Допустим, что $\sin 22° = \frac{a}{b}$ – рациональное число, где a и b – натуральные числа.

$$\boxed{\cos 88°} = \cos 2 \cdot 44° = 2\cos^2 44° - 1 = 2(\cos 2 \cdot 22°)^2 - 1 =$$

$$= 2(1 - 2\sin^2 22°)^2 - 1 = 2(1 - 4\sin^2 22° + 4\sin^4 22°) - 1$$

$$= 1 - 8\sin^2 22° + 8\sin^4 22° = 1 - \frac{8a^2}{b^2} + \frac{8a^4}{b^4} = \boxed{\frac{b^4 - 8a^2b^2 + 8a^4}{b^4}}$$

Левая часть равенства является иррациональным числом, тогда как правая часть является рациональным. Такое равенство невозможно $\Rightarrow \sin 22°$ является иррациональным числом.

Задача 3. «Докажите, что в любой бесконечной десятичной дроби можно так переставить цифры, что полученная дробь станет рациональным числом».

Букина А.С.

3. Рассмотрим цифры, участвующие в записи дробной части данной бесконечной десятичной дроби. Обозначим $a_1, a_2, \dots, a_k$ – цифры, встречающиеся конечное число раз, а $b_1, \dots, b_n$ – цифры, встречающиеся бесконечное количество раз. Пусть Пусть цифра a_1 встречается в записи m_1 раз; a_2 встречается в записи m_2 раза; …, a_k встречается в записи m_k раз. Тогда запишем число следующим образом: $c,\underbrace{a_1a_1\dots a_1}_{m_1}\underbrace{a_2a_2\dots a_2}_{m_2}\dots\underbrace{a_ka_k\dots a_k}_{m_k}(b_1b_2\dots b_n)$, где $\overline{b_1b_2\dots b_n}$ – период бесконечной периодической дроби. Т.о. получено рациональное число (В записи буквой c обозначена целая часть исходного числа).

Задача 4. «Пусть a, b и c – различные простые числа. Докажите, что $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ и $\sqrt{c}$ не могут быть членами одной арифметической прогрессии».

Букина А.С.

(4) Положим противное, т.е. $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ и $\sqrt{c}$ – члены одной арифм. прогрессии. Не умаляя общности будем считать, что $a < b < c$. Обозначим d – разность прогрессии.

$$\exists\ n \in \mathbb{N}: \quad \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{n} = d$$

$$\exists\ m \in \mathbb{N}: \quad \frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{m} = d$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{n} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{m}$$

$$m\sqrt{b} - m\sqrt{a} = n\sqrt{c} - n\sqrt{b}$$

$$(m+n)\sqrt{b} = n\sqrt{c} + m\sqrt{a}$$

$$(m+n)^2 \cdot b = n^2c + 2mn\sqrt{ac} + m^2a$$

$$\sqrt{ac} = \frac{(m+n)^2 \cdot b - n^2c - m^2a}{2mn}$$

Заметим, что в правой части рав-ва записано рациональное число $\Rightarrow \sqrt{ac}$ тоже рационально, т.е. ac является точным квадратом, что противоречит тому, что a и c попарно различные простые числа.

Задача 5. «Докажите, что если $(m,30)=1$, то число, состоящее из цифр периода дроби $\frac{1}{m}$ делится на 9».

Букина А.С.

(5) Пусть $\frac{1}{m} = \overline{0,a_1a_2\ldots a_k(b_1b_2\ldots b_n)}$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_k b_1b_2\ldots b_n} - \overline{a_1a_2\ldots a_k}}{\underbrace{99\ldots9}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{k}} =$$

$$= \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_k}\cdot 10^n + \overline{b_1b_2\ldots b_n} - \overline{a_1a_2\ldots a_k}}{(10^n-1)\cdot 10^k} =$$

$$= \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_k}\,(10^n-1) + \overline{b_1b_2\ldots b_n}}{(10^n-1)\cdot 10^k}$$

$$\Rightarrow \quad (10^n-1)\cdot 10^k = \overline{a_1a_2\ldots a_k}\,(10^n-1)\cdot m + \overline{b_1b_2\ldots b_n}\cdot m$$

Заметим, что $(10^n-1) \vdots 9$ $\Rightarrow$ выражение в левой части рав-ва делится на 9 и первое слагаемое правой части равенства делится на 9 $\Rightarrow$

$\overline{b_1b_2\ldots b_n}\cdot m \vdots 9$. Т.к. m не кратно 3, то $\overline{b_1b_2\ldots b_n} \vdots 9$, ч.т.д.

Примеры ошибок и недочетов в решениях задач конкурсантов, не занявших призовые места.

Задача 1. Все решили верно.

Задача 2.

Пример 2.1.

Пусть $\sqrt{1-p^2/q^2}=a \Rightarrow 1-\frac{p^2}{q^2}=a^2$

$\frac{p^2}{q^2}=1-a^2 \Rightarrow p^2=(1-a^2)q^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ число p имеет делители, причем кратные $q \Rightarrow$ дробь p/q является сократимой $\Rightarrow$ приходим к противоречию $\Rightarrow$ т.о. число $\sin 22°$ является также иррациональным

a^2 - рациональное число, причем равное $1-\frac{p^2}{q^2}$.

Тогда $1-a^2=\frac{p^2}{q^2}$ тоже дробь.

Вопрос о делимости обеих частей подчеркнутого равенства здесь неуместен.

Здесь вообще $p^2 = p^2$

Пример 2.2.

По условию $\cos 2°$ - иррациональное число, значит и $\cos 1°$ - иррациональное число из (1)

Почему? Какая аргументация?

Пример 2.3.

$\exists\ \cos 2^\circ = x,\ \in Ir$

$\sin 2^\circ = y \in\ ?$

cos(a) - иррациональное число
про sin(a) ничего не знаем
Он в общем случае может быть как рациональным, так и иррациональным

$$\ominus\ \frac{1}{2}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) - 2\sqrt{3}(yx^3 - y^3x) =$$

$$= \frac{1}{2}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) - 2\sqrt{3}\,xy(x^2 - y^2).$$

Оценим полученную разность, т.к. $\cos 2^\circ = x$ − иррациональное число, то и полученная разность является иррациональным числом. $\Rightarrow$ $\sin 22^\circ$ − иррациональное число, при условии, что $\sin 88^\circ$ − иррациональное число.

Почему?

Пример 2.4.

$$\sin 22^\circ = \frac{\sin 88^\circ}{2(\cos 66^\circ + \cos 22^\circ)}; \quad (1)$$

Замечание 1. Если предположить, что мы не знаем теорему (*), то иррациональность чисел cos22 и cos 66 нужно доказывать/проверять.

$\sin 88^\circ$ − иррациональное по условию

Теоерма (*)

$\cos 22^\circ$ и $\cos 66^\circ$ тоже иррациональные, т.к. если $0 < \alpha < 90$, $\alpha \neq 60^\circ$ и α содержит рациональное число градусов, то $\cos\alpha$ − иррац. число

Сумма двух иррац-х чисел будет в данном случае иррационал-ным числом.

$\Rightarrow$ вся дробь (1) будет иррациональным числом.

Значит, $\sin 22^\circ$ − иррационален

Замечание 2. Если предположить, что мы знаем теорему (*), то тогда зачем выше изложенные выкладки???

ч.т.д.

Задача 3. Все решили верно.

Задача 4. *Ошибка*: $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ и $\sqrt{c}$ - **подряд идущие** члены арифметической прогрессии.

Задача 5.

Док-во.

1) Докажем, что равенство $\frac{10^n-1}{m} = \overline{a_1a_2\ldots a_n}$ равносильно тому, что десятичное представление дроби $\frac{1}{m}$ имеет вид $0,(a_1a_2\ldots a_n)$.

Здесь описан частный случай, надо было рассматривать 1/m как 0,b1b2...bm(a1a2...an)